הטכניון – הפקולטה למתמטיקה
חדו"א 1מ 104018
בוחן סמסטר חורף 03.12.2019

משך הבוחן שעתיים, ללא חומר עזר (כולל מחשבונים).
בבוחן שני חלקים.
החלק ראשון מורכב משאלות בחירה מרובה ושאלות נכון או לא נכון. בשאלות אלו יש לסמן את התשובה הנכונה. אין לרשום הסברים.
החלק השני מורכב משאלות פתוחות. עבור שאלות אלו, יש לרשום פתרונות מנומקים, **בעט (לא אדומה)**, על גבי המחברת המצורפת.

בהצלחה

חלק א

שאלה 1 (8 נקודות)

תהי: $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ אזי:

א. $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=\infty$

ב. הפונקציה חד-חד ערכית בקטע $(-1,1)$

ג. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$

ד. לכל $n\in\mathbb{N}$ קיימים $x_1,x_2\in(-1,0)$ עבורם מתקיים $f(x_1)<-n,\quad f(x_2)>n$

שאלה 2 (8 נקודות)

נתון כי $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+c\cdot\sin(x)}-2}{2x}=1$. אז

א. $c=1$

ב. $c=3$

ג. $c=7$

ד. $c=8$

שאלה 3 (8 נקודות)

לכל $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, כאשר f עולה ממש ו-g יורדת ממש, מתקיים כי

א. $f\circ g$ עולה ממש

ב. $g\circ f$ עולה ממש

ג. $g\circ g$ חד-חד ערכית

ד. $f\cdot g$ (כפל פונקציות) יורדת ממש

שאלה 4 (8 נקודות)

אם $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$ אז

א. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$

ב. יש סביבה שמאלית מנוקבת של 1 בה $f(x)>0$

ג. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=1$

ד. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{tg(x-1)}=3$

שאלה 5 (8 נקודות)

לכל $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מתקיים כי

א. אם $f(x)$ זוגית, אזי $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

ב. אם $f(x)$ אי-זוגית, אזי $\lim_{x\to 1} f(x)=-f(-1)$

ג. אם $\lim_{x\to 0}\big(f(x)-g(x)\big)=1$ וגם $\lim_{x\to 0} g(x)=\infty$, אזי $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

ד. אם $\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-g(x)\big)=1$ וגם $g(x)\neq 0$ לכל x, אזי $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

שאלה 6 (8 נקודות) **סמנו נכון\לא נכון ליד כל סעיף**

א. לכל $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ולכל $L\in\mathbb{R}$ מתקיים כי: $\lim_{x\to 0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x^3)=L$

נכון \ לא נכון

ב. לכל $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ולכל $L\in\mathbb{R}$,
אם לכל $\delta>0$ מתקיים שכאשר $0<|x-a|<\delta$ אז $|f(x)-L|<\delta^2$,
אז $\lim_{x\to a} f(x)=L$

נכון \ לא נכון

ג. אם $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ וגם $\lim_{x\to 1} g\big(f(x)\big)=0$, אז בהכרח $\lim_{x\to 1} f(x)=0$

נכון \ לא נכון

ד. אם $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים (וסופי), וגם $\lim_{x\to a}\big(3f(x)-2g(x)\big)$ קיים (וסופי), אז $\lim_{x\to a} g(x)$ קיים (וסופי)

נכון \ לא נכון

חלק ב

שאלה 1 (25 נקודות)

א. (5 נקודות) הגדירו $\lim_{x\to -2}\frac{2x+1}{x+1}=3$.

ב. (20 נקודות) הוכיחו לפי הגדרה כי $\lim_{x\to -2}\frac{2x+1}{x+1}=3$.

שאלה 2 (27 נקודות)

הסבירו את תשובותיכם בצורה מלאה.

א. (9 נקודות) מיצאו את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+xsin(x^2)+2\cos(x)}{2x^2-xcos(x)+2\sin(x)}$$

ב. (9 נקודות) מיצאו את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to 1}\frac{tg(x^2-1)\cdot\sin(x)}{\mathrm{x}\cdot\sin(x-1)}$$

ג. (9 נקודות) הוכיחו :

אם $f(x) \le g(x) \le h(x)$ לכל x, וגם הגבולות $\lim_{x\to 0^-} f(x), \lim_{x\to 0} g(x), \lim_{x\to 0^+} h(x)$ קיימים (וסופיים), וגם $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = L$, אז $\lim_{x\to 0} g(x) = L$.